

.....

Fokasz Nikosz

# Láthatjuk-e ha jön?\*

**Determinizmus, káosz, előrejelzés — egy új természettudományos paradigma  
társadalomtudományi vonatkozásairól**

Aki próbálta már, tudja. Manapság értelmes párbeszéd elindítása a természet- és társadalomtudományok közt szinte a lehetetlenséggel határos. Kivételes alkalmak és kivételes érdeklődésű kutatók persze mindig akadnak, a kölcsönös tájékozatlanság, a másik fél problémáival szembeni értetlenség mégis általánosnak tekinthető.

A társadalomtudósok szemében — a konkrét szakkérdéseken túl — talán természettudós kollégáik tudományelméleti közönye és naiv tájékozatlansága lehet a legfeltűnőbb. Magam pedig — aki inkább a másik oldalról, a matematika felől keveredtem a szociológia területére — hosszú évtizede nem szűnök meg csodálkozni azon, hogy a Weber, Bourdieu, Habermas vagy Heidegger, pláne Wittgenstein szövegein érlelődött elmék milyen könnyen akadnak fenn a középiskolás matematika rostáján.

Más persze a *nyelv*, és hiányzik a kellő *motiváció* is. Úgy képzelem ezért, hogy ha bizonyos problémákról — esetünkben előrejelezhetőség és determinizmus viszonyáról — kiderül, hogy a társadalomtudósokat is élénken foglalkoztatják, akkor megnő a készség a

---

\* A jelen tanulmány a TÁRKI-ban, Kolosi Tamás vezetésével folyó, a "Mérés a társadalomtudományban" címmel OTKA-kutatás keretében készült.

.....  
vonatkozó új természettudományos eredmények befogadására, s nagyobb lesz a türelem a megértés esetleges nehézségeivel szemben is.

Ezért döntöttem úgy, hogy nyersanyagként kezelve egy néhány évvel ezelőti konferencia előadásait, először a társadalomtudósokat szólaltatom meg, hadd lássuk, mit mondanak, mit gondolnak Ők az előrejelezhetőség, determinizmus, indeterminizmus problémájáról. Innen fogunk óvatosan a matematika vizeire evezni, majd visszatérve a konferencia-előadásokhoz, a bemutatott eredményeket a mai társadalomtudósi hiedelmekkel szembesíteni.

Előre kell még bocsátanom, hogy a determinisztikus káosz bemutatásra kerülő kérdéskörnek most csak egy rendkívül kicsi szeletét s annak is csak végtelenül leegyszerűsített változatát áll módomban tárgyalni. Helyzetem ahhoz hasonló, mintha valaki Habermas kommunikatív cselekvés elméletének lelkesült kifejtése közben, a megértés érdekében, a magyar nyelv középiskolás grammatikai alapfogalmait is kénytelen lenne előadni.

Hiszem azonban, hogy a természettudósok nagyot léptek előre olyan problémák vizsgálatára és megértésére terén, melyek meggyőződésem szerint a társadalomtudósokat is a legközvetlenebbül érintik. Ha ezt a hitet sikerül ezúttal hitelesen — ha nem is tovább — csupán előadnom, már azzal mélyen elégedett lehetnék.

\*

Valamilyen jelentős, váratlan esemény bekövetkezése — földrengés vagy más természeti katasztrófa, műszaki baleset vagy hirtelen jött gazdasági válság — szükségképpen önvizsgálatra készíti az adott terület kutatóit. Láttuk-e hogy jön? — tették fel magyar társadalomtudósok is a kérdést a kelet-európai államszocialista rendszerek rendkívül gyors összeomlása láttán.<sup>1</sup>

A válaszok eltérő jellegűek voltak. Itt most kevésbé érdekelnek az olyan filozófiai távlatú álláspontok, melyek szerint "történefilozófiai értelemben a társadalomtudományok előre látták ezt a fordulatot"<sup>2</sup> (Szamuely), hisz ez esetünkben azzal az állítással lehet egyenértékű, mely szerint "egyetlen igazi prognosztizációja van (...) a történettudománynak vagy a társadalomtudománynak (...), mégpedig az, hogy el fog jönni a messiás"<sup>3</sup> (Komoróczy).

Közelebbről érint bennünket az a szaktudósi álláspont, mely szerint "aktuális történelmi értelemben mi, legalábbis a közgazdászok, tudtuk, hogy gazdaságilag ez a rendszer Kelet-Európában nem tartható, csődbe jutott. Sietek azonban hozzátenni: jómagam bizonyos voltam abban, hogy az összeomlás nem az én életemben fog megtörténni"<sup>4</sup> (Szamuely). Hasonló véleményen volt Laki Mihály is, megerősítve, hogy "túl hosszúra méreteztük a rendszer korát ahhoz képest, amit tudtunk róla"<sup>5</sup>. Kovács András pedig ezt részletezte tovább azzal, hogy "a Szovjetunióval foglalkozó tudomány nem azért mondott csődöt a szovjet rendszer válságának előrelátásában, mert nem állt rendelkezésére elegendő információ, hanem azért, mert a megfigyelt és leírt folyamatokat olyan deduktív összefüggésekbe helyezte, olyan elméletekbe rendezte el, amelyekből nem a rendszer összeomlását, hanem éppenséggel hosszú távú fennmaradását jósló következtetések adódtak"<sup>6</sup>.

A fentiekől kissé eltérően Andorka Rudolf, kicsit talán a mundér becsületét is védve, hosszasan sorolta "a magyar szociológia fő megállapításait"<sup>7</sup>, helyesnek ítélte előrejelzéseit a "magyar valóság egyes részterületeiről"<sup>8</sup>. Ő sem látta azonban kielégítőnek a szociológia teljesítményét a "leírt társadalmi jelenségek okainak vizsgálatára terén"<sup>9</sup>.

.....

A mélyebbre hatoló oksági elemzés hiányának egyik lehetséges magyarázata, hogy bár "a hivatalos társadalomtudomány is produkált igen sok értékes eredményt, de ha volt terület, ahol nemigen produkálhatott jót, az éppen a rendszerről mint rendszerről való elmélkedés"<sup>10</sup> (Bence).

Sokkal többre azonban a "rezsím nyomásának ki nem tett vagy magukat függetleníteni tudó elmék"<sup>11</sup> sem jutottak, hiszen köztük is sokan "valamiféle örökmozgó gépet láttak a kommunista rendszerben, mely legfeljebb külső erő hatására romolhat el"<sup>12</sup> (Bence).

Úgy tűnik, a résztvevők túlnyomó többségének álláspontját fogalmazta meg Bence György azzal, hogy az adott esetben a társadalomtudományoknak nem sikerült "elméleti érvvel és rendszerezett tapasztalati bizonyítékokkal alátámasztott előrejelzéseket"<sup>13</sup> tenniük. Olyanokat, amelyek nem csupán homályos, intuitív meggyőződésen alapuló jóslatok, hanem "deduktíve következnek bizonyos elméleti tételekből és ténymegállapításokból"<sup>14</sup> (Bence).

Természetesen igazuk lehetett a tudós résztvevőknek, amikor az adott esetben elsősorban politikai okokkal, valamint szakmai gyengeséggel magyarázták a tudományos előrelátás hiányát. Mégis feltűnő, hogy ebben a — Soós Vilmos kifejezését kölcsönözve — "nyilvános bűnbocsánatra és önostorozásra"<sup>15</sup> hajló, "dehogyan láttuk" hangulatban milyen kevesen foglalkoztak azzal a kérdéssel, hogy vajon maguknak a problémáknak, a kérdéses jelenségeknek a természete mennyiben teszi lehetővé az előrejelzést.

Egyáltalán min múlik, mitől függhet, hogy bizonyos folyamatok, jelenségek olyan könnyen előrejelezhetők, míg mások a legnagyobb nehézségek árán sem?

A leghatározottabban talán Fehér M. István kérdőjelezte meg a konferencia-kérdésből kiérezhető azon vélekedést, mely szerint a "társadalomtudománynak valamilyen értelemben — tudomány jellegéből adódóan — előre kellett volna látnia azt, ami jön"<sup>16</sup>. Álláspontja szerint "az előrelátás hiánya nem tekinthető negatívumnak"<sup>17</sup>, mivel a "társadalmi jelenségek megjósolása (...) beavatkozik a társadalom menetébe"<sup>18</sup>. Erre a Popper által Oidipusz-effektusnak nevezett hatásra talált szép példát Rév István a keletnémetek viselkedésében, akik "1989 nyarán hanyatt-homlok, ingóságait, autójukat is hátrahagyva menekültek Nyugat-Németországba. Pedig ha előre látnák volna azt, ami történt (...), akkor nem tették volna mindezt. De (...) ha az összes keletnémet otthon ült volna (...), nem az történt volna, ami megtörtént"<sup>19</sup>.

Hasonlóan kritikus álláspontra helyezkedett Komoróczy Géza is, azt állítva, hogy a társadalomtudományi eredmények jövőbe való extrapolációja "olyan, mintha egy hipotézisre újabb hipotézist építenénk"<sup>20</sup>, márpedig ezek "a hipotézisekre épített hipotézisek hatványszerűen veszítenek valószínűségükből"<sup>21</sup>.

\*

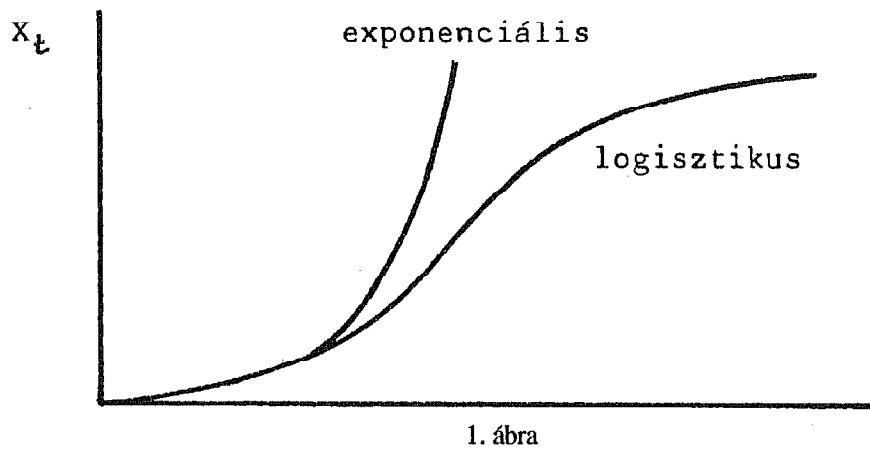
Ezen a ponton rövid időre felfüggeszthetjük a konferencia-szövegek elemzését. Komoróczy ugyanis kiváló végszóval szolgál matematikai mondanivalónk elindításához. Igaz, az általa használt "hatványszerűen" kifejezés szempontunkból félrevezetően pongyola, hisz nincs az a matematikus, aki ennek hallatán ne valamilyen hatványfüggvényre gondolna. Márpedig látni fogjuk, hogy ezúttal nem erről van szó. Értelmezése, matematikai terminológiára való átfogalmazása mégsem okoz különösebb nehézséget.

.....

Ez a "hatványszerűen" ugyanis leginkább talán valami olyasmit jelenthet, hogy amennyiben hipotéziseink egymástól függetlenül mondjuk rendre 50 százalékos valószínűséggel jönnek be, akkor kettő együtt csak egynegyed, három egynolcad, négy pedig már alig egytizenhatod eséllyel rendelkezik. Egymásra épülő hipotéziseink ilyen módon csakugyan rohamosan veszíthetnek valószínűségükből. A mögöttes *folyamat* azonban általánosabb jellegű, célszerű lehet ezért más példákon, több oldalról is szemügyre vennünk.

Nem kétséges, hogy ha a fenti felezési szabály mondjuk valamilyen populáció népesedési törvénye lenne, akkor ezt igen hamar a kihalás veszélye fenyegetné. Gyakoribbak azonban az olyan populációk, melyekben ennek fordítottja, feleződése helyett a gyors túlnépesedéssel fenyegető duplázódási szabály érvényesül.

Társadalomtudós körökben különösen jól ismert, hogy Malthus éppen ilyen szabályt tekintett az emberi népesség természetes növekedési törvényének. Teljes határozottsággal állította, hogy "ha a népesedést semmi sem gátolja, a megkésztetődésre huszonöt évenként sor kerül, vagyis a növekedés mértani haladvány arányú"<sup>22</sup>. Hasonló Solla Price régi, szép példája is, aki évtizedekkel ezelőtt figyelt fel arra, hogy a tudományos folyóiratok száma már három évszázada makacs egyöntetűséggel 15 évenként megduplázódik.



1. ábra

Mindenki szemléletes képet alkothat ennek a mára már legalább húsz duplázódást megért növekedésnek a gyorsaságáról, ha megpróbál egy egyszerű írógéppapírt hússzor félbehajítani. Nem fog sikerülni. A hajtogatás eredménye több mint száz méter vastag lenne, harminc hajtogatással pedig, ha nem is a csillagokig, de jóval a sztratoszférán túlra, 100 kilométernél is magasabbra jutnánk. De természetesen nem juthatunk.

Ezért mondhatta a közgazdász Jánossy Ferenc, hogy "egy tetszőleges folyamat, mely láncreakációszerűen, a mértani haladványnak megfelelően megy végbe, előbb vagy utóbb olyan állapothoz vezet, amelyben szétrombolja saját meghatározó előfeltételeit"<sup>23</sup>. Malthusnál az emberiség túlzott szaporodása háborúkba, nyomor okozta járványokba, éhínségbe torkollott. Jánossynál pedig a fejlett tőkés országok múlt századi, szintén mértani haladványt követő, extenzív iparosodása az 1929—1933-as világgazdasági válsággal zárult. A végkifejlet azonban nem feltétlenül mindig ilyen drámai. Könnyen előfordulhat,

.....  
hogy a megkettőződési folyamat a növekedést fékező tényezők hatására fokozatosan lelassul, majd ez a — végre nevén nevezett — *exponenciális* növekedés átadja helyét egy telítettségi szinthez tartó, ahhoz szépen odasimuló *logisztikus* növekedésnek (lásd *1. ábrát*).

Remélem, mindenkinek feltűnt s kellően értékeli, hogy a fenti két alapvető növekedési szabályhoz — Komoróczy egy elejtett megjegyzéséből kiindulva — kizárólag társadalomtudományi problémákon keresztül jutottunk el. Ha a populáció kifejezést elég tágan értelmezzük, a példák még bőséggel szaporíthatók. Elvileg ugyanis nemcsak az emberek, folyóiratok vagy ipari üzemek, hanem egyéb vállalatok, esetleg vállalkozók, szaktudományos publikációk és idézetek, a legkülönfélébb értékek, újítások, de még a viselkedési minták, magatartási szabályok, esetleg szavak vagy egyéb nyelvi kifejezések terjedése, "szaporodása" is ilyen vagy nagyon hasonló szabályokat követhet. Úgy vélem ezért, hogy e folyamatok tüzetesebb vizsgálata nem lehet idegen a társadalomtudósoktól sem.

\*

Megvallom, itt elakadtam. Írás közben két teljes napot elvesztegettem azzal, hogy megpróbáltam e növekedési folyamatokat a képletek teljes mellőzésével bemutatni.

Szemléletesnek szánt példákkal igyekeztem érzékeltetni, hogy exponenciális növekedésre olyankor számíthatunk, ha mondjuk tíz darab, már megírt publikációból, ugyanennyi ipari üzemből vagy bankba tett forintból ugyanakkora erőfeszítéssel lehet egy továbbit fiálni, mint százból tízet, vagy ezerből százat. Ez a folyamat tehát állandó növekedési ütemmel jellemezhető, mely ütem adott esetben megegyezik a populációt alkotó egyedek szaporodási rátájával. Logisztikus esetben a növekedési ütem — próbálkoztam volna — ugyanettől a paramétertől függ, csak egy kicsit bonyolultabban.

Míndez igaz, s lehet, hogy sokaknak elég is. Kár lenne azonban teljesen lemondanunk a matematikai formalizmus nyújtotta lehetőségekről. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy csupán diszkrét időpontokat — nevezhetjük akár éveknek is — figyelünk meg, s jelölje  $X_t$ , a vizsgált populáció létszámát a  $t$ -ik időpillanatban.

Ha a növekedés exponenciális, akkor bármely évben az egyedek száma mindig ugyanannyiszorosára növekszik, tehát:

$X_{t+1} = pX_t$  vagy másképpen  $X_{t+1}/X_t = p$  teljesül, ahol  $p$  konstans.

Logisztikus növekedés esetén a csak kicsit bonyolultabb

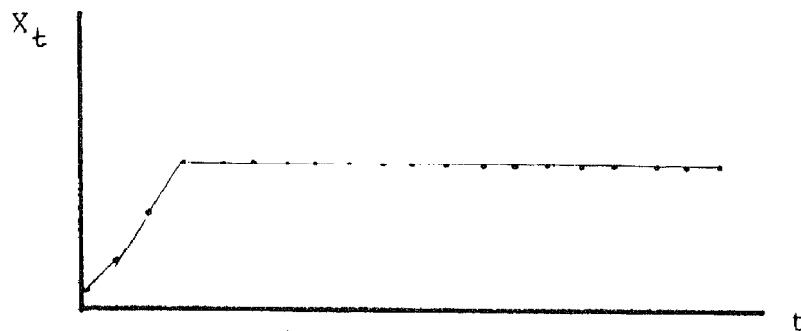
$X_{t+1}/X_t = p - pX_t$  összefüggés érvényesül, ahol a  $p$ -ből kivont  $pX_t$  tag jelzi, hogy ebben az esetben a populáció létszámának növekedése a már elért  $X_t$  szint függvényében, azzal arányosan lassul. A számolás itt most nem részletezhető kényelmi szempontjai miatt azt is feltesszük, hogy  $X_t$  csak 0 és 1 közötti értékeket vehet fel.

Modelljeinket felállítottuk. A bennük rögzített szabályok ismeretében nyilván bármely év adatából könnyűszerrel kiszámíthatjuk a rákövetkezőt. Ismételt alkalmazásukkal pedig a populáció létszámának hosszú távú alakulását is évről évre nyomon követhetjük. Az is világos, hogy a létszám hosszú távú változása a  $p$  paramétertől függ.

Exponenciális esetben ha  $p < 1$ , akkor a populáció menthetetlenül kipusztul, hiszen létszáma minden évben töredéke az előző évinek, míg  $p > 1$  mellett a határ a csillagos ég, akármi is volt a populáció eredeti létszáma. Egynél kisebb paraméter logisztikus növekedés

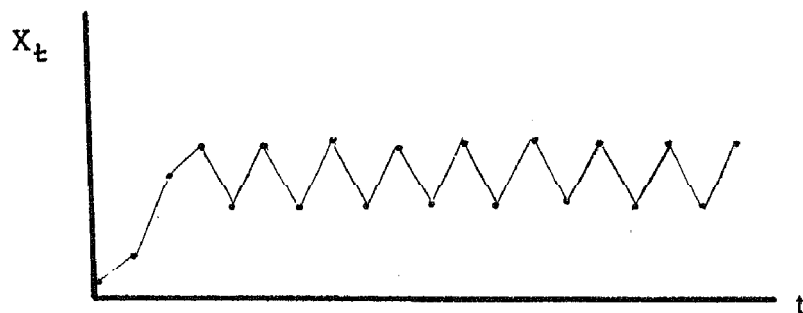
.....  
esetén is a populáció eltűnéséhez vezet. Az exponenciálisétól eltérő viselkedésre csak  $p > 1$  mellett számíthatunk.

S csakugyan, 1 és 3 közötti paraméterértékeknel a populáció létszáma kisebb-nagyobb kezdeti ingadozások után — ahogy ez a logisztikus növekedéstől el is várható — egy meghatározott szinten stabilizálódik, s attól kezdve állandó marad (2. ábra).



2. ábra

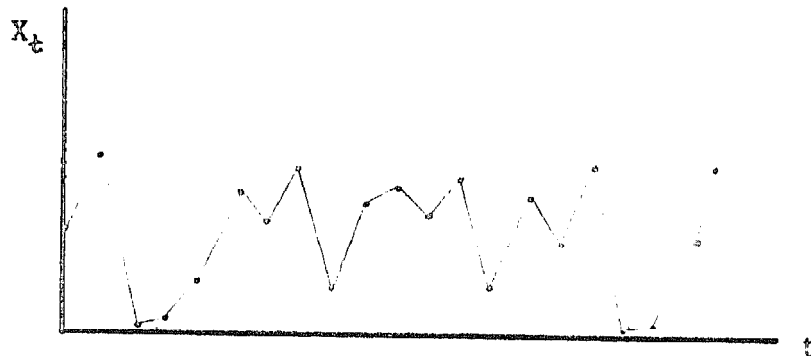
Háromnál nagyobb  $p$  értékekre azonban váratlan meglepetések következnek. Először azt tapasztaljuk, hogy a populáció létszáma hirtelen két érték közt kezd el oscillálni, és viselkedése szabályos, kétéves periodicitást mutat (3. ábra). A paraméter további növekedésével a periódushossz gyors — 4, 8, 16, 32 év stb. — duplázódásának lehetünk tanúi, majd igen hamar — már  $p > 3,57$  esetén — a populáció létszámának alakulása kaotikussá, értsd minden szabályszerűséget nélkülözővé, véletlen jellegűvé válik (4. ábra).



3. ábra

Érdeemes figyelni arra, hogy rendszerünk ezt a véletlenszerű viselkedést nem ismeretlen eredetű, kiszámíthatatlan és ellenőrizhetetlen külső hatások eredményeként, hanem saját

.....  
belső működési szabályai révén állítja elő. Ilyesmit korábban csak nagy elemszámú, bonyolult rendszerekről feltételeztek.



4. ábra

R. Brown már a múlt század elején felfigyelt arra, hogy a folyadékra szórt kis részecskék szakadatlan, szabálytalan mozgást végeznek. Csaknem nyolc évtizeddel később Einstein azzal a magyarázattal állt elő, hogy a megfigyelt részecskék véletlenszerű mozgását a nekik ütköző folyadékmolekulák okozzák. Igenám, de ha minden egyes ütközés determinisztikus (márpedig az), akkor az eredmény (a folyadékra szórt részecskék mozgása) hogyan lehet mégis véletlenszerű? Általános vélekedés szerint ennek oka a rendszer alkotórészeinek igen nagy —  $10^{23}$  nagyságrendű — száma. E szerint nagyon sok kicsi és egymástól független hatás véletlenszerű viselkedést produkálhat. Ez a Brown-mozgás esetében többször is megnyugtató módon igazolódott magyarázat azonban egyszerű, kis elemszámú logisztikus modellünk esetében biztos nem állja meg a helyét.

A hetvenes évek közepének azon felismerése tehát, hogy egy egyszerű determinisztikus rendszer is produkálhat véletlenszerű viselkedést, mindenképpen szemléletformáló jelentőségű.

A populáció létszámának alakulása tehát elég nagy  $p$  paraméterérték esetén szabálytalan-ná válik. Kiszámítani attól még persze lehet, hisz a szabály adott. De csak akkor, ha az adatok tökéletes pontossággal állnak rendelkezésünkre. A kiinduló adatok legkisebb pontatlansága vagy bármilyen kicsi korrekciója elegendő ahhoz — s ez az újabb meglepetés —, hogy modellünk időbeli változása teljesen más pályát fusson be.

Erre a jelenségre először a meteorológus Edward Lorenz figyelt fel, aki rendkívül eltérő hosszú távú időjárás-prognózisokat kapott csupán amiatt, hogy a miénkhez hasonló szimulációs egyenleteit a korábbiaktól kismértékben eltérő, kerekített adatokkal futtatta újra. Számítógépe percenként generálta egy-egy újabb nap adatait, s körülbelül két hónapnak megfelelő futás után a kezdeti kis kerekítési hibák akkorára növekedtek, hogy elnyelve magát a jelet, lehetetlenné tették a prognózist.

Az általani ismert legszebb példát bizonyos folyamatoknak a kiinduló feltételek iránti érzékenységére Esterházy Péter mutatta be, említést téve "egy kocsmáról a Freiburgba

vezető út mentén, hogy annak eresztől egyfelől a Rajnába, másfelől a Dunába folya a víz<sup>24</sup>. Idővel tehát a legkisebb eltérés is óriásivá nőhet, hisz végül is két, egymás közvetlen szomszédságában lecső vízcsepp közül az egyik könnyen az Északi-tengerben, míg a másik a Fekete-tengerben köthet ki. Vagyis léteznek olyan folyamatok, melyek — akár a hegycsúcsról legördülő szikla — rendkívül érzékenyek a kezdeti feltételek változására. Az általunk elemzett folyamatokat ráadásul nemcsak a kiindulásnál, de pályájuk minden egyes pontjában ilyen fokú érzékenység jellemzi. Bizonyítást nyert, hogy a hiba minden egyes iterációs lépéssel, azaz az "évek" múlásával exponenciális módon növekszik, azt pedig már láttuk, hogy ez a féktelen növekedés mire képes.

Ennek következtében egyszerű *determinisztikus* rendszerünk viselkedése teljességgel *előrejelezhetetlenné* válik! Ezen még a lehető legpontosabb adatok sem segítenek, mivel az exponenciális hibaerősítés bármilyen kis hibát — márpedig akármit is teszünk, mérésiinkben valamekkora pontatlanság mindig marad — oly mértékűvé növel, ami lehetetlen-né teszi a prognózist.

A nyolcvanas évek elejére természettudós körökben általánossá vált meggyőződés szerint a természetben — s magam is tanulmányaimmal azt szeretném sugallni, hogy a társadalomban is — bőséggel található példák olyan determinisztikus rendszerekre, melyek viselkedése nem előrejelezhető. Meteorológusok, biológusok, csillagászok, kémikusok, a fizika és a matematika legkülönbözőbb területein dolgozó kutatók járultak hozzá azon jelenség-csoport feltáráshoz, melyet napjainkban leginkább a *determinisztikus káosz* elnevezéssel szokás jelölni, ezzel is utalva arra a meglepő felismerésre, hogy a determinizmus korántsem azonos a prognosztizálhatósággal.

\*

Térjünk most vissza a *Láttuk-e, hogy jön?* konferencia előadásaihoz! Nem kétséges, a fentebb bemutatott eredményeknek messzemenő következményei vannak. Biztos felül kell vizsgálnunk például azt a konferencián Andorka által hangoztatott, de egyébként is közkeletű vélekedést, hogy "ha az egyének szabad akaratán, döntésein múlnak bizonyos társadalmi változások, akkor azok sokkal kevésbé előreláthatóak, mint ha determinisztikus törvények létét tételezzük fel"<sup>25</sup>. A káoszelmélet fényében a szociológiai szemléletnek Andorka szerint kibontakozóban lévő alapvető módosulása, "az egyén szerepének és szabadságának új felismerése"<sup>26</sup> sem kell feltétlenül együtt járjon a determinizmustól való elfordulással.

Igaza lehet persze Andorkának abban, hogy az "egyén ember nem tehetetlen a nagy történelmi folyamatokkal szemben"<sup>27</sup>, hiszen ahogy Bibó is állította, a történelemnek vannak "nagy folyékony és képlékeny korszakai. Ilyenkor rengeteg múlik két-három, esetleg nem is nagy kaliberű, de a döntő pillanatban ott lévő embernek a személyes állásfoglalásán, a személyes cselekvésmódján"<sup>28</sup>. Amit én hajlamos vagyok úgy lefordítani, hogy Bibó szerint a történelemnek lehetnek kaotikus állapotai. E lehetőség azonban erősen hely- és időfüggő, mivel a "helyzet némi folyékonyág után többé-kevésbé megmerevedik (...), és utána (...) hosszú ideig eléggé kiszabott és kitaposott síneken megy tovább, ahol nem olyan túl nagy a játéklehetősége a döntő személyeknek"<sup>29</sup>.



.....

Az "egyén történelmi szerepének" nagyobb teret engedve sem kell azonban feltétlenül túllépnünk a determinista szemlélet nyújtotta kereteken. A kelet-európai változások példájánál maradva erre még a "Gorbacsov-tényezőre" való hivatkozás (ahogy azt Andorka teszi) sem ad kellő alapot. Egy kaotikus determinisztikus folyamatnak ugyanis a természet világában is könnyen meglehet a maga "Gorbacsov-tényezője", csak azt ott másként, a meteorológiában például "pillangó-effektusként" emlegethetik. Arra utalnak vele, hogy az időjárást, amennyiben kaotikusnak tekinthető, még egy pillangó szárnycsapása is érdemben befolyásolhatná. Hát még egy meteorológiai műhold felbocsátása. Könnyen előfordulhat ezért, hogy éppen egy ilyen, az előrejelzés céljait szolgáló akció miatt sosem fogjuk megtudni, milyen lett volna az időjárás a rakéta fellövése nélkül. Mivel a mai tudományos standardok szerint az előrelátás nem intuitív jóslást, hanem információgyűjtésre, tehát beavatkozásra alapozott tevékenységet jelent, megeshet, hogy a természettudományos előrejelzés — ha magával a közléssel nem is, de a beavatkozás révén — befolyásolja a vizsgált folyamatokat.

Úgy tűnik tehát, vannak a külső hatásokra kellően érzéketlen, s ezért könnyen előrejelezhető, de szép számmal akadnak a legkisebb beavatkozásra is rendkívüli érzékenységgel reagáló s emiatt prognosztizálhatatlan folyamatok. Megkülönböztetésük helyes, fontos és célszerű. Fehér M. Istvántól eltérően azonban nem gondolom, hogy határvonaluk oly nyilvánvalóan egybeesne a természet- és társadalomtudományok közti választóvonalal. Inkább keresztbe metszi azt.

Továbbmenve, ha a társadalmi folyamatoknak a legkisebb közülük lehet a determinisztikus káosz jelenségéhez, akkor Fehér M. István azon állítása, hogy "a társadalmi folyamatok előzetes megjósolása (...) csak akkor lehetséges, ha a jósnak olyan koncentrált hatalom van a kezükben, hogy képesek megvalósítani a megjósolt eseményt"<sup>30</sup>, érzésem szerint nemcsak "nem kívánatos", de nem is reális társadalmi állapotra vonatkozik.

Lehet-e nagyobb hatalmunk annál, mint amekkoráival egy egyszerű számítógépes szimuláció során rendelkezünk? Itt könnyű mindent ellenőriznünk, kézben tartanunk. Magunk állapítjuk meg a játékszabályokat, döntünk adataink felől. És mégis, rossz esetben — persze ez benne a jó — a folyamatok itt is kicsúszhatnak a kezeink közül. Talán éppen ezért állítható, hogy a társadalomban egy "összesküvés soha — vagy legalábbis szinte soha — nem hozza meg azt az eredményt, melyre előzetesen számítottak"<sup>31</sup>(Popper). Lehetséges, hogy a determinisztikus káosz jelenségköre adhat új értelmet azon tapasztalatunknak, mely szerint a "társadalom életében soha semmi nem történik pontosan úgy, ahogyan előzetesen eltervezték"<sup>32</sup>, s hogy "cselekedeteinknek mindig vannak szándékolatlan következményei"<sup>33</sup>.

Ha Poppernek igaza van, és a társadalomelméletnek csakugyan "fő feladata annak megmagyarázása, hogy miért nem tudjuk kiküszöbölni"<sup>34</sup> ezeket a szándékolatlan következményeket, akkor tán nem árt a determinisztikus káosz kialakulását még egyszer egy kicsit alaposabban szemügyre vennünk.

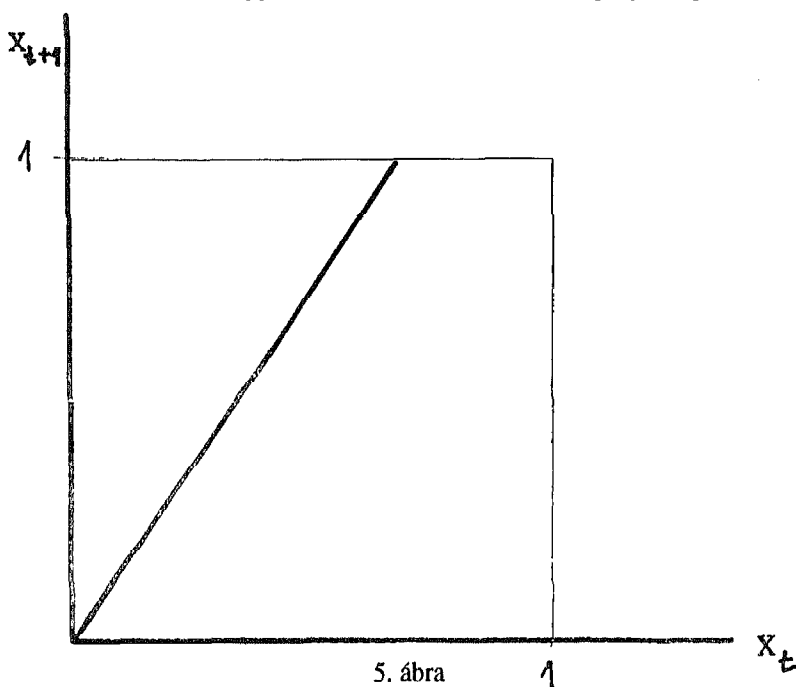
\*

A káosz kialakulásának általunk bemutatott forgatókönyve két sarkalatos elemet tartalmazott. Először is "évről évre" ugyanazt az egyszerű szabályt ismételtgettük. A logisztikus

.....  
 egyenlet segítségével valamilyen kezdeti értékből kiindulva egy adott évre kiszámítottuk a populáció létszámát, majd ezzel az értékkel mint inputtal ugyanezt az eljárást a következő évben megismételtük.

Aki a függvényiteráció ezen formájáról úgy vélné, hogy túlságosan életidegen és mesterkelt, ilyenmel társadalomtudós nem találkozhat, az gondoljon a társadalom és gazdaság legkülönbözőbb körfolyamataira vagy újratermelési modelljeire. Arra a lehetséges ellenvetésre pedig, hogy ezek során sohasem *ugyanaz* a szabály ismétlődik, Braudel nyomán azt felelhetjük, hogy "a mindentütt jelenvaló, mindent elárasztó, önmagát ismétlő anyagi élet a megszokás, a rutin jegyében folyik: a magot úgy vetik, ahogyan mindenkor vetették; a rizsföldet úgy készítik elő, ahogyan mindig szokták; és úgy hajóznak a Vörös-tengeren, ahogyan mindig hajóztak (...). A makacsul, falánkan jelenlevő múlt egyhangúan nyeli az emberek tűnékeny életét. És a stagnáló történelemnek ez a rétege roppant kiterjedésű: a falusi élet, vagyis a földteke népességének 80—90 százaléka majdnem teljesen ennek a körébe tartozik"<sup>35</sup>.

Az ismétlés azonban önmagában nem elegendő. Az  $X_{t+1} = pX_t$  összefüggés iterációja például soha, s az  $X_{t+1} = X_t(p - pX_t)$  logisztikus egyenlet is csak meghatározott  $p$  paraméterértékek esetén vezet káoszhoz. A két eset közti döntő különbség, hogy míg az első egyenletben  $X_{t+1}$  lineáris függvénye  $X_t$ -nek, addig a másodikban ez az összefüggés nem-lineáris, s a  $p$  paraméter éppen a nem-linearitás mértékét ragadja meg (5. és 6. ábra).



5. ábra

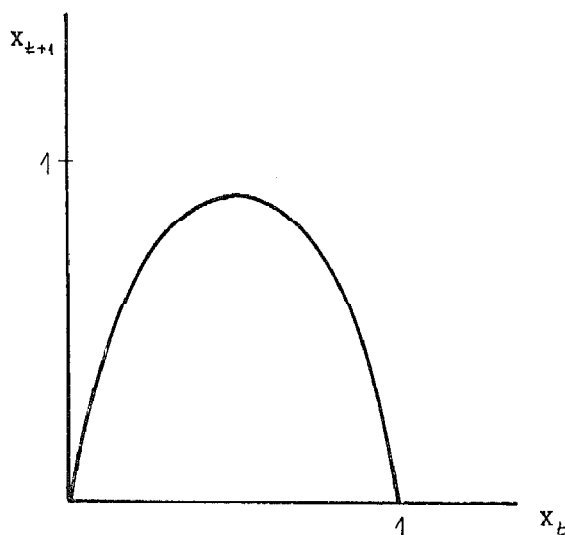
Nem-linearitás és *ismétlődés* húzódik meg az általunk elemzett káosz kialakulásának háttérében. Ezért használatos a *nem-lineáris káosz* elnevezés is, s explicit módon erre utaló címadásában Szilágyi Imre<sup>36</sup>. Ha jól értcm őt, akkor tévesen. Tudjuk, a félreértés "a

.....

filozófiai (és a humán tudományok területén jelentkező) viták talán egyik legszokványosabb<sup>37</sup> esete, mégis azt remélem, hogy helyesen fejtettem meg "cum grano salis" értendő téziséit. E szerint a tudomány célja a totalitarizmusban öhatatlanul apologetikus volt, nem "az igazság keresése"; a modern nyugati tudományok pedig "mindenekelőtt a sikerre", tehát nem "kifejezetten a létigazságra törekszenek". Mindkét esetben "tudományos álsztraktumokhoz" jutunk, s az általuk "eltorzított valóságérzet" vonja maga után "a kalkulálhatatlanság felerősödését"<sup>38</sup>.

Szilágyi állítása szerint tehát a nem-igaz, a hamis, a pontatlan tudás teszi lehetetlenné az előrejelzést, aminek azonban, szerintem, a hivatkozott nem-lineáris káoszhoz semmi köze. Ez utóbbi esetben ugyanis azt a sokkal erősebb állítást tehetjük, hogy nincs az a pontosság, amely a hosszú távú prognózist lehetővé tenné. A kaotikus determinisztikus folyamatok előrejelzése nem a mi hibánkból, hanem elvileg lehetetlen!

Ha(!) a régióinkbeli változásoknak a legkisebb közül is van az ilyen típusú folyamatokhoz, akkor Andorkával egyetértésben joggal gondolhatjuk, hogy a társadalomtudományoknak csakúgy "nem kell önkritikát gyakorolniuk amiatt, hogy nem látták azokat előre"<sup>39</sup>.



6. ábra

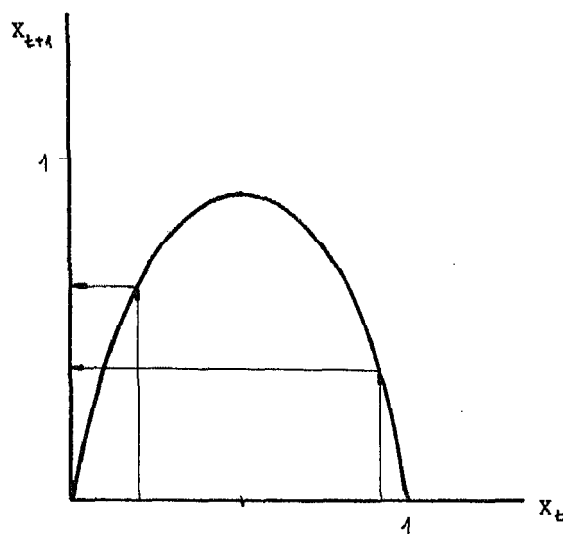
"Mi marad akkor a szociológia feladata?" — kérdi erre az esetre gondolva Andorka, de válasza, hogy "a társadalmi valóság feltárása, legsürgősebb bajainak bemutatása, az okok vizsgálata és ennek alapján azok orvoslási lehetőségeinek kutatása"<sup>40</sup>, problémánkból nem old meg semmit. Nem világos ugyanis, hogy az "okok vizsgálata" mit jelenthet a determinizmustól szerinte éppen elforduló szociológiában; a "bajok bemutatása" visszacsempészi a korábban általa is kárhoytatott normatív jellegét; a "feltárás" pedig program ugyan, de túlságosan általános.

Ennél a pontnál talán illenék még egyszer hangsúlyoznom, hogy amit csinállok, nem teljesen tisztességes — bár nem is olyan tisztességtelen — a konferencia résztvevőivel

.....

szemben. Miközben ők a "láttuk-e, hogy jön?" kérdésre feleltek, én, elég önkényesen, a "láthatjuk-e, ha jön?" kérdésre vonatkozatható megjegyzéseiket emeltem ki válaszaikból. Céloom nem előadásaik rekonstruálása, hanem annak illusztrálása volt, hogy az előrejelezhetőség a társadalomtudományok körében is jelenlévő, aktuális probléma. Erre vonatkozóan pedig, úgy tűnik, olyan hallgatólagos előfeltevések léteznek, melyeket a legújabb természettudományos és matematikai eredmények fényében legalábbis újragondolni ille-  
nék.

Az azonban már most világos, hogy bizonyos folyamatok esetében a "hogyan fog lezajlani?" kérdést mint megválaszolhatatlant, nem is érdemes feltennünk. Mire számíthatunk akkor?



7. abra

Ha karunkat tehetetlenül széttárva azt mondanánk, a "zűrzavarral" nincs mit kezdeni, az olyan lenne, mint ha a relativitás elméletet a "minden relatív" közhellyel intéznénk el. A káoszelmélet azonban — éppen az általunk is bemutatott determinisztikus háttér miatt — ennél jóval többet nyújthat: a zűrzavarban is valamiféle rend felismerésének lehetőségét. A természet egyszerű szabályok *ismétlése* révén bonyolult mintázatokat, *szervezeteket* hozhat létre. Meghökkenítő mértékben rímel ezzel az a történelmi megfigyelés, mely szerint a történelemben "az úgynevezett napi esemény *ismétlődik*, és eközben általánossá vagy pontosabban: *struktúrává* lesz"<sup>41</sup>(Braudel). Ez a *struktúra* vagy *szervezet* valamiféle rendet jelent a káoszban, s ennek mibenlétét kell megértenünk.

\*

Ahhoz, hogy feltárhassuk, hogy az itt emlegetett ismétlődés milyen struktúrákat, szervezeteket állíthat elő, nézzük meg, miként működik az  $X_{t+1} = p(1 - X_t)X_t$  logisztikus leképezés geometriai értelemben. A 7. ábráról látszik, hogy a beinduló perióduskettőzés

.....

tartományában, tehát  $p > 3$  paraméter érték esetén külön-külön a  $(0,1/2)$  és az  $(1/2,1)$  intervallumokat is megnyújtja. A két szakasz megnyújtott képe azonban egybeesik, ami csak úgy történhet, hogy a függvény a megnyújtott szakaszokat még össze is hajtja.

*Nyújtás és összehajítás*, ez tehát a káosz forgatókönyvének szemléletes geometriai jelentése. Azt kellene ezért megfontolnunk, milyen típusú alakzatok, szerkezetek jöhetnek így létre. Nyilván rendkívül összegyűrt formákra kell számítanunk. Ha természeti objektumok közt keresgélünk, akkor egy felhőkontúr, valamely lánchegység vagy egy erősen szabdalt tengerpart szolgálhat szemléletes példaként. Kérdés persze, hogy kezdetünk-e bármit az ilyen szabálytalan alakzatokkal. Ki tudja, miféle geometriai forma szolgálhatna modellül mondjuk egy tengerpart szerkezetének megragadásához.

Figyelemre méltó, hogy Jánossy Ferenc már 1963-ban, a gazdasági fejlettség mérési problémáival foglalkozó könyvében olyan gondolatmenettel szolgált, melyből világosan kiderülnek az itt váró nehézségek. Illusztratív példájának feltételezése szerint "egy sziget nyugati és keleti csücskén van egy-egy kikötő: A és B. Felmerül a kérdés, hogy A és B között az északi vagy a déli part hosszabb. Egyelőre tételezzük fel, hogy a fogadás eldönítéséről, tehát (...) játékról van szó. A vitákozók egy 1:100 000 léptékű térképen lemérik a part hosszát, ezen az északi part bizonyul valamivel hosszabbnak. A vesztés azonban, tudva, hogy a déli part finomabban tagolt, ebbe nem nyugszik bele. Valóban, egy katonai térképen mérve, finomabb tagoltsága következtében, a déli part bizonyul hosszabbnak. A kérdés végleges eldöntéséhez vitázóink kimennek a tengerpartra méricskélni. Azonban már az első métereknél fennakadnak, mert nem tudnak megegyezni abban, hogy körülmérjenek-e minden egyes követ, vagy csak a tengerbe nyúló nagyobb sziklákat vegyék figyelembe. Kiderül, hogy elmulasztottak a fogadás előtt a játékszabályokban megegyezni, vagyis definiálni, hogy mi értendő a partszakasz hossza alatt. (Játék esetén a nagyságdefiníció tetszőleges, és a definíciótól függően ugyanaz a partszakasz 10 km vagy 100 km hosszúnak is adódhat)"<sup>42</sup>.

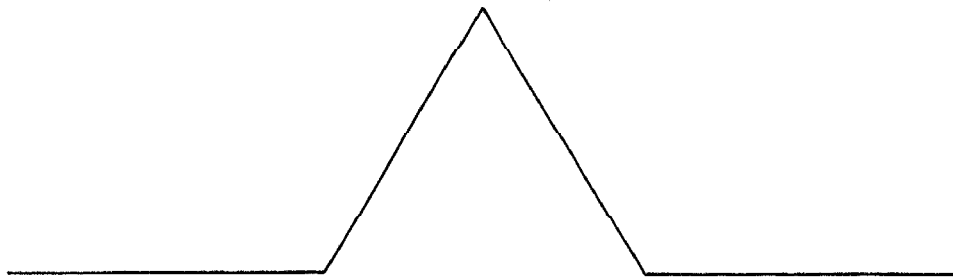
Vagy még hosszabbnak! — tesszük mi hozzá. Egy természetes módon formálódott tengerpart esetében ugyanis a lépték finomodásával újabb és újabb, korábban nem látott részletek, öblök, bemélyedések, kanyarulatok bukkanhatnak elő. Lemértem a térképen. Az Anglia délnyugati csücskén található Land's End és a skóciai felföld legészakibb szöglete a Duncanshy-fok közti távolság légvonalban biztosan nem több ezer kilométernél. L. F. Richardson 1961-ben posztumusz publikált empirikus vizsgálatában<sup>43</sup> mégis úgy találta, hogy az e két pontot összekötő nyugati partvidék hossza a lépték finomodásával felbukkanó újabb részletek jövőtábol minden határon túl nő, a végtelenhez tart. Mindez nyilván más tengerpartra vagy ugyanezen tengerpart bármelyik részére is igaz. Kérdés, hogyan hasonlíthatjuk így össze a különböző partszakaszok hosszát, vagy hogyan szerezhetünk érvényt azon meggyőződésünknek, hogy egy görbe felének hossza a görbe hosszának fele kell legyen.

A hosszúság ártatlannak látszó fogalma tehát egy egyszerű földrajzi alakzat esetében váratlan bonyodalmakat okoz. Olyannyira, hogy a "How long is the coast of Britain?"<sup>44</sup> kérdése igen hamar egy új matematikai tudományágnak, a fraktálhalmazok elméletének leggyakrabban idézett illusztrációs példájává vált.

A helyzet az, hogy találtunk egy véges síkrészen — esetünkben egy 1000 km átmérőjű körön — belül elhelyezkedő görbét, melynek hossza szemlátomást végtelennek adódik.

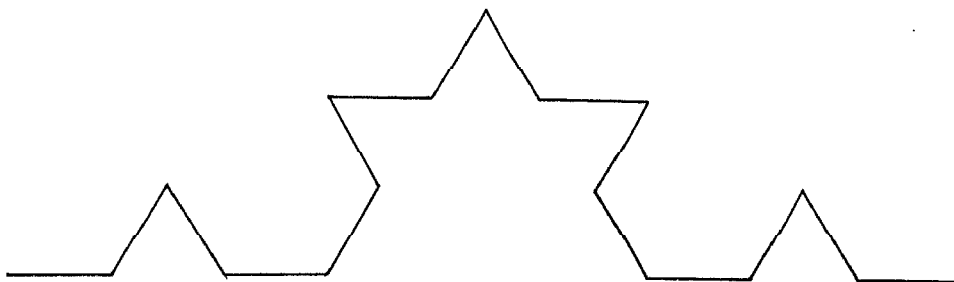
.....

Ez akkor is rendkívül meglepő, ha tudjuk, hogy ilyen alakzatokat a matematika a század eleje óta ismer. Arra ugyanis senki sem számított, hogy a természetben akárcsak hasonlókra is bukkanhatunk. Egészen a hetvenes évek közepéig az ilyen objektumokat a tiszta ész túlhajtott, minden praktikus felhasználásra alkalmatlan, mesterséges konstrukciónak tekintették. Elsőként Benoit Mandelbrot figyelt fel arra, hogy milyen termékeny eredményekre juthatunk, ha a megszokott és közismert geometriai alakzatok — egyszerű vonal, kör, ellipszis, gömb, kúp stb. — helyett bizonyos természeti formákat inkább ilyen "szörnyszülött" szerkezetekkel azonosítunk.



8. ábra

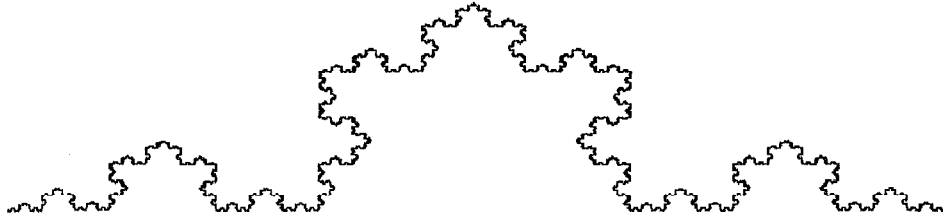
Az iskolapélda a század elején alkotott — s Mandelbrot által a partszakasz modelljeként ajánlott — *Koch-görbe*. Előállításuk rendkívül egyszerű. Induljunk ki egy egységnyi hosszúságú szakaszból, s távolítsuk el a középső harmadát. Az így adódó két új szakaszhoz illesszünk két velük egyenlő hosszúságú szakaszt "háztető"-alakban (lásd a 8. ábrát). Az így keletkezett alakzat négy darab, egyenként egyharmad hosszúságú szakaszból fog állni, összhossza ezért az eredeti egységnyi hosszúságú szakasz  $4/3$ -szorosára lesz. Ismételjük meg a fenti eljárást az új,  $1/3$  hosszúságú szakaszok mindegyikével. Vegyük ki a középső harmadukat, és egészítsük ki mindegyiket a megfelelő "háztető" formával. Az így kapott 9. ábrán is látszik, de az eljárásból is nyilvánvalóan következik, hogy ezzel a lépéssel az előzőhöz képest megint  $4/3$ -szorosára nőtt a görbe hossza. Folytassuk ezt a konstrukciós eljárást a végelenségig. A 10. ábra még csak igen kezdeti állapotát, a nyolcadik lépés utáni állapotot mutatja be, segítségével mégis képet alkothatunk arról, hogy az eljárás további folytatása révén milyen jellegű alakzatra számíthatunk.



9. ábra

.....

Világos, hogy a határértékként adódó, ún. Koch-görbe, a tengerparthoz hasonlóan végtelen hosszúságú lesz, miközben ugyancsak véges síkrészre korlátozódik. A Koch-görbe tehát ebből a szempontból csakugyan a tengerpart jó modelljének bizonyult. Egyéb tulajdonságai miatt is megérdemli azonban figyelmünket.



10. ábra

A Koch-görbe előállításánál alkalmazott konstrukciós eljárás ugyanis valamely szakaszt minden egyes lépésben négy darab harmad-hosszúságú szakaszból álló "háztető"-formára bont. Felfoghatjuk ezért úgy is, hogy az eredeti szakasz egyes részeinek — esetünkben valamelyik harmadának — finomodó léptékű felnagyításával mindig újabb és újabb részletek, s ezzel együtt *mindig ugyanaz* a "háztető"-alak bukkan elő. Ebben az értelemben a konstrukció során kapott görbék nagyon szigorú hierarchikus rendbe, egy *önhasonló* alakzatba szerveződnek. Az önhasonlóság fejeződik ki abban is, hogy az egymást követő görbékben egy szakasz mindig négy egyforma kisebbre bomlik. Világos, hogy a konstrukciós eljárás során rendre ezeket választva új mértékegységnek, a görbe hossza ebben az új léptékben a megelőzőnek mindig négyszerese lesz. A bizonyítást itt mellőzzük, de könnyen belátható, hogy ekkor a különböző görbék hosszát a finomodó lépték függvényében — mindkét tengelyen logaritmikus skálájú koordináta-rendszerben — ábrázolva egyenest kell kapjunk (11. ábra).

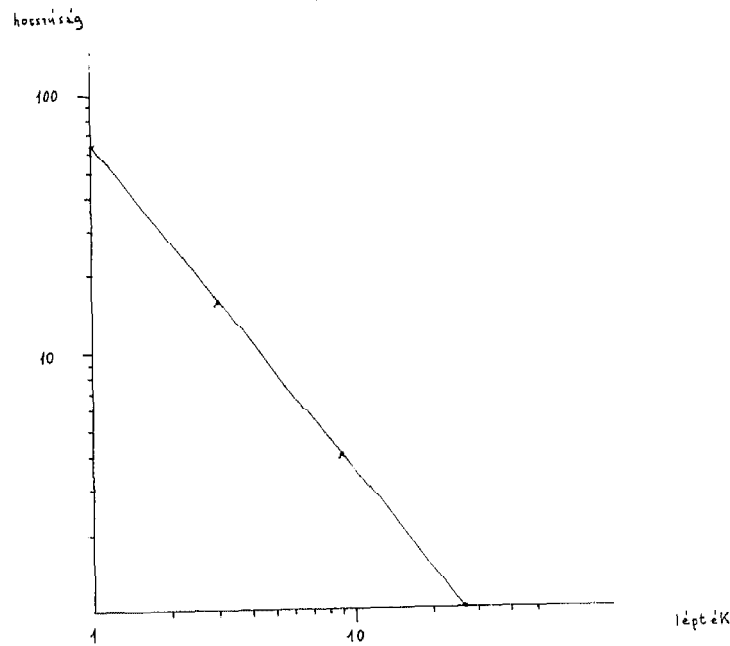
Az önhasonló jelleget természeti alakzatok esetében nem ilyen könnyű bebizonyítanunk, de talán elég lesz láttatnunk. Itt ugyanis segíthet a hétköznapi rutin és szemlélet. Nyilván mindenki tapasztalta már, hogy a lépték közlése nélkül lehetetlen eldönteniünk, hogy térképen néhány kilométeres tengerpartot vagy netán ennek csak néhány méteres részletét látjuk-e; egy fényképről minden egyéb támpont nélkül megállapítanunk, hogy óriási hegységet vagy annak csupán egy kis részét képező sziklát ábrázol-e. Ezeket az alakzatokat tehát ebben a szemléletes értelemben hajlamosak vagyunk önhasonló alakzatoknak látni. Ennek jogosságát megerősíti, hogy L. F. Richardson az egyes tengerpartszakaszok különböző lépték mellett adódó hosszúságának alakulására ugyanazt a — log-log skálán egyenest eredményező — formulát kapta, mint mi a Koch-görbe esetén (vö. a 11. és 12. ábrákat).

Ezen önhasonló alakzatokat felfedezőjük, B. Mandelbrot, fraktáloknak nevezte el; s vizsgálataikkal mintegy két évtizede a matematika egy külön ága foglalkozik. Első felismerésük óta természettudós körökben általánossá vált a meggyőződés, hogy az élő és élettelen

.....

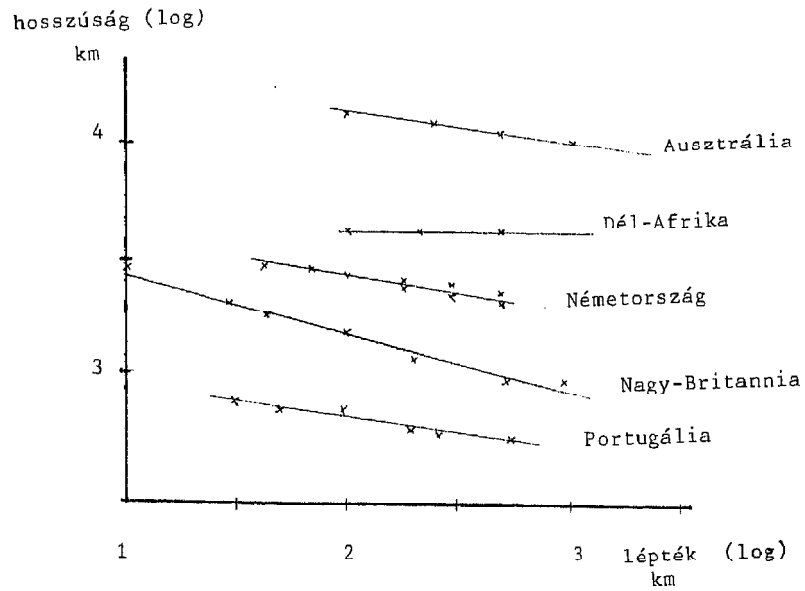
természet gazdag sokféleségben állít elő fraktál-formákat. A Hold krátereiben ezt már ugyanúgy megállapították, mint a fák koronája, egy ágas-bogas folyódelta, az emberi tüdő vagy érhálózat esetében. Magam ezt azzal egészíteném ki, hogy szerintem a társadalommal is ez a helyzet. Bizonyító erejű példáim még nincsenek, csak egy hevenyészett gyűjtésem: a városok lakosságának szerinti eloszlása (13. ábra), bizonyos szövegekben a szavak gyakoriság szerinti előfordulása (14. ábra), a tudományos kutatók publikációinak száma szerinti eloszlása (15. ábra), vagy az egyes szócikkekben előforduló hivatkozások száma (16. ábra) mind olyan példa, melyek esetében megalapozott gyanúról beszélhetünk. A bemutatott ábrák ugyanazt a képet nyújtják, mint amelyet a Koch-görbe, illetve a tengerpart esetében kaptunk! Pontos adatok híján csak halvány sejtésről beszélhetek a településszerkezet, a vállalati üzemméret, a tudományos viták szerkezete vagy a vasúthálózat esetében.

Kaotikus folyamatok esetében tehát nem felelhetünk ugyan a "hogyan fog lezajlani?" kérdésre, feltárhatjuk viszont, hogy az adott folyamat milyen szerkezeteket, strukturákat — reményeim szerint igen gyakran fraktálokat — fog eredményezni. Ezzel nemcsak megfelelnék azon, Szűcs Jenő által megfogalmazott, történelmi szemléletnek, mely szerint a "történelem mögött a századokon átnyúlóan, hosszú távon is bizonyos szerkezetek (kiemelés tőlem) lényegesek"<sup>45</sup>, hanem idővel talán e szerkezet szónak, mint sok más társadalomtudományi metaforának is, egzakt (esetünkben talán geometriai) jelentést adhatunk.

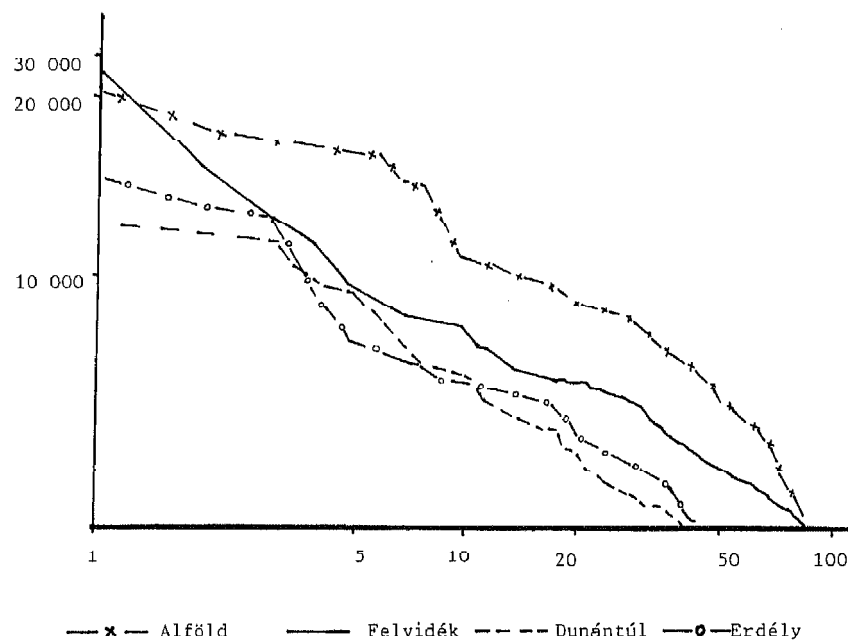


11. ábra

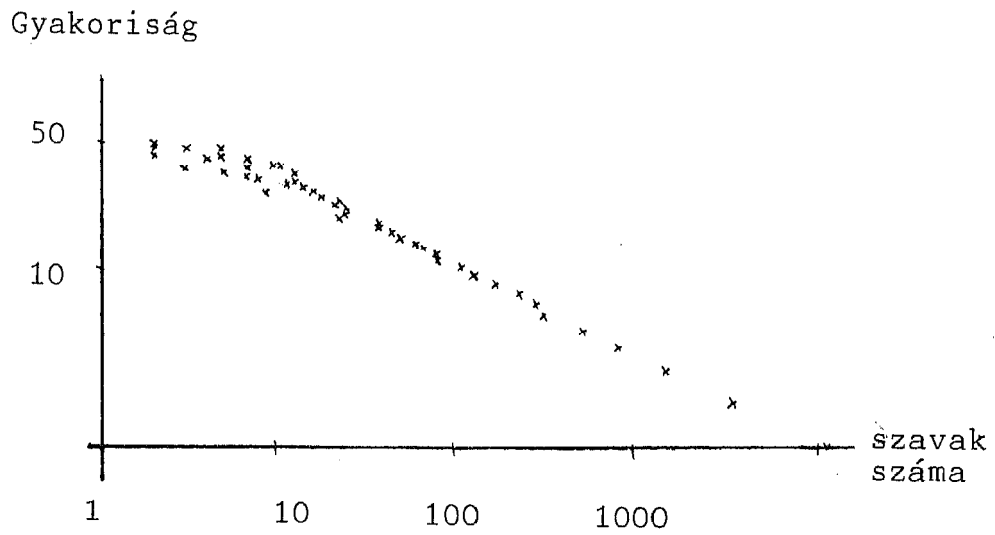




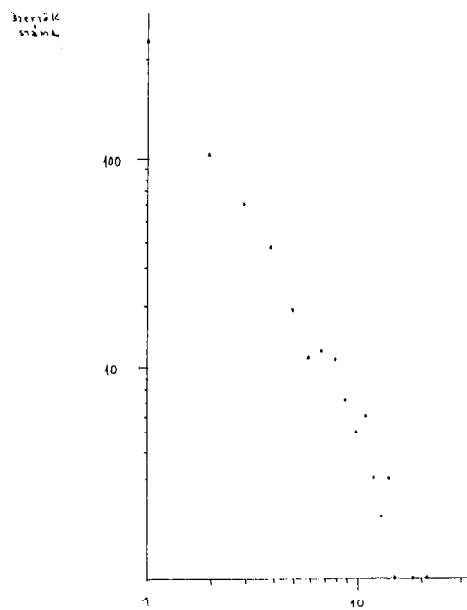
12. ábra



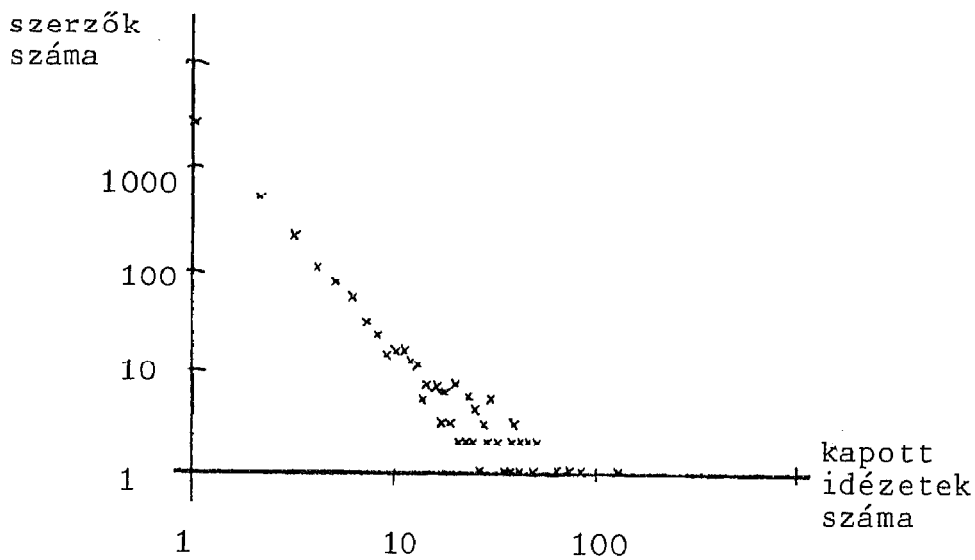
13. ábra Négy régió városainak rank-size eloszlásai 1784—1787-ben



14. ábra Szavak előfordulási gyakorisága az Iliászbán



15. ábra A magyar közgazdász kutatók publikációk szerinti eloszlása



16. ábra Az idézett szerzők megoszlása a Közgazdasági Szemlében

## Irodalom

1. Láttuk-e hogy jön?  
(Az ELTE Filozófiatörténeti Tanszékcsoport és a Budapesti Könyvszemle Konferenciája 1990. december 7.)  
*Twins Konferencia-Füzetek* 1. 1991.  
(A továbbiakban, ha külön nem jelezzük, minden hivatkozás a fenti konferenciakötetre vonatkozik)
2. Szamuely László, 25. old.
3. Komoróczy Géza, 32. old.
4. Szamuely László, 25. old.
5. Laki Mihály, 34. old.
6. Kovács András, 37. old.
7. Andorka Rudolf, uo.
8. Andorka Rudolf, uo.
9. Andorka Rudolf, 61. old.
10. Bence György, 82. old.
11. Bence György, uo.
12. Bence György, uo.
13. Bence György, uo.
14. Bence György, uo.
15. Soós Vilmos, 86. old.
16. Fehér-M. István, uo.

17. Fehér M. István, uo.  
 18. Fehér M. István, uo.  
 19. Rév István, 11. old.  
 20. Komoróczy Géza, uo.  
 21. Komoróczy Géza, uo.  
 22. T. R. Malthus: Tanulmány a népesedés törvényéről. In.: *Népességrobbanás—Egyke*, Kriterion Könyvkiadó, Bukarest, 1982. 66. old.  
 23. Jánossy Ferenc: *A gazdasági fejlődés trendvonaláról*. Magvető, Budapest, 1975. 8. old.  
 24. Esterházy Péter: *Hahn-Hahn grófnő pillantása*. Magvető, Budapest, 1991. 19. old.  
 25. Andorka Rudolf, uo.  
 26. Andorka Rudolf, uo.  
 27. Andorka Rudolf, uo.  
 28. Litván György: Egy kései Bibó-levél. In.: *Bibó Emlékkönyv I.*, 135. old. Századvég Kiadó, Budapest, Európai Protestáns Magyar Szabadegyletem, Bern, 1991.  
 29. lásd 28.  
 30. Fehér M. István, uo.  
 31. Karl Popper: "A hagyomány racionális elmélete felé." *Café Bábvl*, 1992/3—4. 110. old.  
 32. Karl Popper, *i. m.* uo.  
 33. Karl Popper, *i. m.* uo.  
 34. Karl Popper, *i. m.* uo.  
 35. Fernand Braudel: *Anyagi kultúra, gazdaság és kapitalizmus, XV—XVIII. század*. Gondolat, Budapest, 1985. 20. old.  
 36. Szilágyi Imre, 56. old.  
 37. Márkus György: *Kultúra és modernitás*, 281. old. T-Twins Kiadó, Lukács Archívum, Budapest, 1992.  
 38. Szilágyi Imre, 56—57. old.  
 39. Andorka Rudolf, uo.  
 40. Andorka Rudolf, uo.  
 41. F. Braudel, *i. m.* 22. old.  
 42. Jánossy Ferenc: *A gazdasági fejlettség mérhetősége és új mérési módszere*, KJK. Budapest, 1963. 37—38. old.  
 43. Lewis F. Richardson: "The Problem of Contiguity: An Appendix to Statistics of Deadly Quarrels." *General Systems Yearbook 6*, 168—169. old.  
 44. A kérdést először Benoit Mandelbrot (How long is the coast of Britain? *Science*, 1967. 155, 636—638. old. veti fel, de igazán ismertté B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*. 1982. New York, W. H. Freeman révén vált.  
 45. Szűcs Jenő: "Vázlat Európa három történelmi régiójáról." *Történelmi Szemle*, 1981. 3. sz. 313. old.